www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Januar bis März 2022

Aufgabe 1

Würfel aus Dominos

a) Für die Anzahl der Dominosteine gilt: n^3, die Anzahl der weißen Dominosteine ist demzufolge $(n - 2)^3$. Die Anzahl der braunen beträgt dann $n^3 – (n – 2)^3$

b) Laut Aufgabenstellung soll die Anzahl der braunen Steine 26 bzw. 152 sein. Es sind also die Gleichungen $n^3 – (n – 2)^3 = 26$ bzw. $n^3 – (n – 2)^3 = 152$ zu lösen. Nutzt man davor einen GTR so erhält man für $n^3 – (n – 2)^3 = 26$ also Lösung $n = 3$, ($n = - 1$ entfällt). Es sind also $(3-2)^3 = 1$ weißer Dominostein enthalten.

c) $n^3 – (n – 2)^3 = 152$, hat die Lösungen $n = 6$, ($n = - 4$ entfällt). Hier sind also $(6-2)^3 = 64$ weiße Dominosteine enthalten.
$n^3 – (n – 2)^3 = 60002$, hat die Lösungen $n = 101$ ($n = -99$) entfällt. Hier sind also $(101-2)=99^3$ weiße Dominosteine enthalten.
(Hinweis: $n^3 – (n – 2)^3 = n^3 – (n^3 - 6n^2+12n – 8) = 6n^2 -12n+8$.)

Aufgabe 2

Der Schnee in Jonsdorf

a) Die Schneemenge hat die Form eines Quaders, sein Volumen berechnet sich wie folgt:

$$V = Länge \cdot Breite \cdot Höhe;$$
$$V = 50\text{ m} \cdot 40\text{ m} \cdot 50\text{ cm} \;=\; 50\text{ m} \cdot 40\text{ m} \cdot 0{,}5\text{ m} = 1000\ m^3.$$

b) Hier gelten die folgenden Formeln für das Volumen bzw. Oberfläche eines Kreiskegels:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $O = \pi r^2 + \pi r s$, mit s = $\sqrt{h^2 + r^2}$, s ist die Mantellinie.

O soll minimal werden, also O(r,h)= $\pi r^2 + \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$, mit $h = \frac{3V}{\pi r^2}$, folgt:

$$O(r) = \pi r^2 + \pi r\sqrt{\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

Da das Volumen 50m·40m·0,5m=1000 m³, beträgt gilt:

$$O(r) = \pi r^2 + \pi r\sqrt{\frac{9000\,000}{\pi^2 r^4} + r^2}$$

O(r) wird nach GTR an der Stelle r ≈6,963 m also bei etwa 6,96 m minimal. Für die Höhe des Kegels mit der kleinsten Oberfläche gilt dann h ≈19,70 m.

Hier lässt man sich den Graphen anzeigen, und an der Stelle, wo O(r) am kleinsten ist, liest man den Radius ab.

Aufgabe 3

Die Fahrt nach Jonsdorf

a) Wenn man davon ausgeht, dass alle fünf Sitzplätze gerecht unter den drei Kindern aufgeteilt werden, dann gibt es 5 mal 4 mal 3 = 60 Pausen. Wenn es nur darum geht – wer

hinter dem Fahrersitz auf diesem Sitzplatz sitzen darf – dann gibt es nur 3 Pausen, die durch den notwendigen Sitzplatzwechsel benötigt würden.
Hier ist die Aufgabenstellung bewusst etwas offener formuliert worden.

b) Es gelten die üblichen Gesetze: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit.
Für die erste Hälfte der Strecke gilt: $s_1 = 60 \cdot t_1$, für die zweite Hälfte der Strecke gilt: $s_2 = 80 \cdot t_2$. Da laut Aufgabenstellung die gesamte Strecke gleich $s_1 + s_2$ ist und $s_1 = s_2$ gilt, gilt auch $60 \cdot t_1 = 80 \cdot t_2$, also $t_2 = 0{,}75 \cdot t_1$.

Für die Durchschnittsgeschwindigkeit gilt: Gesamter Weg durch die dazu benötigte Zeit, also in Formel:
$v_{Durchschnitt} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{60 t_1 + 80\, t_2}{t_1 + t_2} = \frac{60 t_1 + 0{,}75 \cdot 80\, t_1}{t_1 + 0{,}75 t_1} = \frac{120\, t_1}{1{,}75 t_1} \approx 68{,}57\ [km/h]$.
Johann hat nicht recht, weil die durchschnittliche Geschwindigkeit etwa in diesem Fall 68,6 km/ h beträgt.